Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314
УДК 517.922, 517.927.4

Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори

Ирина Дмитриевна СЕРОВА

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
ФГАОУ ВО «Тюменкий государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

Аннотация. Для многозначного отображения $F:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ рассматривается задача о суперпозиционной измеримости и суперпозиционной селектируемости. Как известно, для суперпозиционной измеримости достаточно, чтобы отображение F удовлетворяло условиям Каратеодори, для суперпозиционной селектируемости — чтобы $F(\cdot,x)$ обладало измеримым сечением, а $F(t,\cdot)$ было полунепрерывным сверху. В работе предлагаются обобщения этих условий, основанные на замене в определении свойств непрерывности и полунепрерывности предела последовательности координат точек образов многозначных отображений на односторонний предел. В работе показано, что при таких ослабленных условиях многозначное отображение F обладает требуемыми свойствами суперпозиционной измеримости / суперпозиционной селектируемости. Приведены иллюстративные примеры, а также примеры существенности предлагаемых условий. Для однозначных отображений предлагаемые условия совпадают с обобщенными условиями Каратеодори, предложенными И. В. Шрагиным (см. [Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки, 2014, 19:2, 476–478]).

Ключевые слова: условие Каратеодори, многозначный оператор Немыцкого, суперпозиционная измеримость, суперпозиционная селектируемость

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314

Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions

Irina D. SEROVA
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
University of Tyumen
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

Abstract. For a multivalued mapping $F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, the problem of superpositional measurability and superpositional selectivity is considered. As it is known, for superpositional measurability it is sufficient that the mapping F satisfies the Caratheodory conditions, for superpositional selectivity it is sufficient that $F(\cdot, x)$ has a measurable section and $F(t, \cdot)$ is upper semicontinuous. In this paper, we propose generalizations of these conditions based on the replacement, in the definitions of continuity and semicontinuity, of the limit of the sequence of coordinates of points in the images of multivalued mappings to a one-sided limit. It is shown that under such weakened conditions the multivalued mapping F possesses the required properties of superpositional measurability / superpositional selectivity. Illustrative examples are given, as well as examples of the significance of the proposed conditions. For single-valued mappings, the proposed conditions coincide with the generalized Caratheodory conditions proposed by I.V. Shragin (see [Bulletin of the Tambov University. Series: natural and technical sciences, 2014, 19:2, 476–478]).

Keywords: the Caratheodory condition, the Nemytsky multivalued operator, superpositional measurability, superpositional selectivity

Mathematics Subject Classification: 47H04, 47H30, 26E25.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Science Foundation (projects no. 20-11-20131).

For citation: Serova I.D. Superpozitsionnaya izmerimost' mnogoznachnoy funktsii pri obobshchennykh usloviyakh Karateodori [Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 305–314.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В исследованиях дифференциальных и интегральных включений систематически используются предположения, обеспечивающие суперпозиционную измеримость или суперпозиционную селектируемость многозначных функций (см. [1–4]). Выполнение таких условий позволяет рассматривать соответствующий оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) в пространствах измеримых функций. Для «обычных однозначных» функций суперпозиционные измеримость и селектируемость равносильны, этими свойствами обладают функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори. Для многозначных функций используется аналог условий Каратеодори (см. [5–7]). В связи с исследованиями существенно нелинейных динамических систем, задач управления с переключающимися режимами и других импульсных систем (см. [8–11]) возникла необходимость исследования операторов суперпозиции, порождаемых разрывными по фазовой переменной функциями. В «однозначном» случае И. В. Шрагиным и др. авторами подробно исследованы обобщения условий Каратеодори, обеспечивающие необходимые свойства оператора Немыцкого (см. [12, 13], а также [14, с. 110]). Эти результаты позволили рассматривать дифференциальные и интегральные уравнения без традиционного предположения непрерывности порождающих эти уравнения функций (см., в частности, работы [14, 15]). В данной статье предлагаются аналогичные обобщения условий Каратеодори для многозначных функций.

Статья содержит три секции. В секции 1. приведены определения основных понятий и доказаны утверждения о многозначных отображениях, требуемые для исследования свойств суперпозиционной измеримости и селектируемости. В секции 2. получено утверждение о суперпозиционной измеримости многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори. В секции 3. получено утверждение о суперпозиционной селектируемости многозначной функции, которая по фазовой переменной удовлетворяет обобщенному условию полунепрерывности сверху.

1. Основные понятия

Приведем некоторые известные определения полунепрерывности, непрерывности и измеримости многозначного отображения (подробнее см. [5–7]), а также введем понятие односторонней полунепрерывности и односторонней непрерывности для случая, когда многозначное отображение задано на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пусть заданы метрические пространства $X := (X, \rho_X)$ и $Y := (Y, \rho_Y)$. Для заданных $y \in Y$, $Y_0 \subset Y$, $r \geq 0$ обозначим через $O_Y(y, r)$ открытый шар в Y с центром в точке y радиуса r, а через $O_Y(Y_0, r) := \bigcup_{y\in Y_0} O_Y(y, r)$ — r-раздутие множества Y_0 (при $r = 0$ полагаем $O_Y(y, 0) = \emptyset$ и $O_Y(Y_0, 0) = \emptyset$). Пусть $\mathrm{comp}(Y)$ — совокупность компактных подмножеств пространства Y. На множестве $\mathrm{comp}(Y)$ полагаем заданной метрику Хаусдорфа

$$h_Y : \mathrm{comp}(Y) \times \mathrm{comp}(Y) \to \mathbb{R}_+, \quad \forall\, U, V \in \mathrm{comp}(Y) \;\; h_Y(U, V) = \max\{h^+_Y(U, V), h^+_Y(V, U)\},$$

где $h^+_Y(U, V) = \sup_{u\in U} \inf_{v\in V} \rho_Y(u, v)$ — полуотклонение множества U от множества V.

Рассмотрим многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$, имеющее непустые компактные образы: $\forall x \in X \;\; G(x) \in \mathrm{comp}(Y)$ (такое отображение многие авторы обозначают $G : X \to \mathrm{comp}(Y)$, но здесь это обозначение не используется, чтобы было удобно различать многозначное отображение и соответствующее однозначное отображение). Отображение G называется *h-полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in X$ из $\rho_X(x_0, x) < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x), G(x_0)\big) < \varepsilon$. Свойство h-полунепрерывности сверху в точке x_0 отображения равносильно свойству его секвенциальной полунепрерывности сверху в этой точке. Отображение G называют *секвенциально полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$, при любом натуральном i и любом $y_i \in G(x_i)$ существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Так как свойства h-полунепрерывности сверху и секвенциальной полунепрерывности сверху в точке x_0 можно не различать, говорят просто о свойстве полунепрерывности сверху в точке x_0.

Отображение G называется: *h-полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in X$ из $\rho_X(x_0, x) < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$, и *секвенциально полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ и для любого $y_0 \in G(x_0)$ при каждом i существует такое $y_i \in G(x_i)$, что $y_i \to y_0$. Вследствие предположения компактности множества $G(x_0)$ понятия h-полунепрерывным снизу и секвенциальной полунепрерывности снизу в точке x_0 равносильны, и в дальнейшем будем говорить просто о полунепрерывности снизу в точке x_0.

Если отображение G полунепрерывно и сверху и снизу в точке x_0, то оно называется непрерывным в этой точке. Это определение равносильно «обычной» непрерывности в точке x_0 отображения G, как однозначного, действующего из метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство $\big(\operatorname{comp}(Y), h_Y\big)$. Отображение, обладающее во всех точках свойством полунепрерывности сверху (снизу) или непрерывности, будем называть полунепрерывным сверху (снизу) или, соответственно, непрерывным.

Приведенные определения часто дают для более широких классов отображений (например, имеющих замкнутые образы), однако для целей данного исследования достаточно рассматривать только отображения с компактными образами. В случае, когда $X = \mathbb{R}$, для многозначного отображения можно определить следующие аналоги свойства односторонней непрерывности «обычных» функций.

Определение 1.1. Многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$ называем:

- *односторонне справа полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x), G(x_0)\big) < \varepsilon$.

- *односторонне справа полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$.

- *непрерывным справа в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$.

Приведенные понятия можно также определить «на языке последовательностей». В частности отображение G односторонне справа полунепрерывно сверху в точке x_0 в том и только том случае, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \geq x_0$, при любом натуральном i и любом $y_i \in G(x_i)$ существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Отметим также, что непрерывность справа в точке x_0 многозначного отображения G равносильна непрерывности справа в этой точке соответствующего однозначного отображения.

Если отображение при всех $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет одному из определений 1.1, то будем опускать в соответствующем термине словосочетание «в точке x_0».

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$, имеющее непустые компактные образы, является односторонне справа полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$. Тогда для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \geq x_0$, $i = 1, 2, \ldots$, множество $Y_0 := G(x_0) \cup \big(\bigcup_i G(x_i)\big)$ компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную последовательность $\{y_i\} \subset Y_0$ и покажем, что она содержит сходящуюся к точке из Y_0 подпоследовательность. Если в этой последовательности бесконечно много элементов, принадлежащих $G(x_{i_0})$ при некотором фиксированном $i_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, то доказываемое утверждение очевидно. Поэтому без ограничения общности полагаем, что $y_i \in G(x_i)$. Вследствие односторонней справа полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$ отображения G существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Далее, вследствие компактности множества $G(x_0)$ существует подпоследовательность $\{\bar{y}_{i_k}\}$, сходящаяся к некоторому элементу $y_0 \in G(x_0)$. Таким образом, последовательность $\{y_{i_k}\}$ также сходится к элементу y_0. □

З а м е ч а н и е 1.1. Определения свойств односторонней полунепрерывности и непрерывности отображения $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$ можно свести к классическим определениям полунепрерывности и непрерывности, если на $\mathbb{R}$ выбрать в качестве базы топологии семейство полуоткрытых интервалов $[\alpha, \beta)$ вместо совокупности «привычных» открытых интервалов (α, β). Однако, в такой топологии всякий отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ уже не будет компактным множеством, также станет невозможным применение результатов, в которых областью определения многозначных отображений являются метрические и нормированные пространства (эти результаты используются в следующем параграфе). Кроме того, с использованием такой топологии не удастся вывести предложение 1.1 из известного результата [7, теорема 1.2.35] о компактности образа компактного подмножества топологического пространства при полунепрерывном сверху отображении, поскольку в этой теореме требуется полунепрерыность во всех точках, а в предложении 1.1 — только в точке x_0.

Теперь рассмотрим многозначное отображение $G : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ такое, что $G(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Это отображение называют *измеримым*, если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ множество $G^{-1}(V) := \{t \in [a, b] : G(t) \subset V\}$ (называемое малым прообразом) измеримо. Для измеримости многозначного отображения G необходимо и достаточно, чтобы измеримым было соответствующее однозначное отображение из $[a, b]$ в метрическое пространство $(\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n), h_{\mathbb{R}^n})$.

Приведем утверждение о сохранении свойства измеримости при предельном переходе. Это утверждение мы сопроводим доказательством, поскольку соответствующий результат широко известен лишь для однозначных вещественных функций, а для действующих в метрическое пространство отображений (и соответственно, для многозначных функций) в ряде классических монографий не приводится (см, в частности, [1, 2, 5–7]).

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть задана последовательность измеримых многозначных отображений $G_i : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, для которых $G_i(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t \in [a, b]$. Если при п. в. t имеет место сходимость $h_{\mathbb{R}^n}\big(G_i(t), G(t)\big) \to 0$, то «предельное отображение» $G : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ также имеет компактные образы и измеримо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компактность множества $G(t)$ при п. в. t прямо следует из полноты метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), h_{\mathbb{R}^n})$ (см. [6, теорема 2.2.3]).

Выберем в $\mathbb{R}^n$ произвольное непустое открытое множество V, отличное от всего $\mathbb{R}^n$. Также определим последовательность открытых множеств $V_k \subset V$, $k = 1, 2, \ldots,$ следующим образом. Для любого $v \in V$ найдем $r(v) := \sup\big\{r > 0 : O_{\mathbb{R}^n}(v, r) \subset V\big\}$ (заметим, что $r(v) < \infty$ при любом $v \in V$) и определим $r_k(v) := \begin{cases} 0, & \text{если } r(v) < k^{-1}, \\ r(v) - k^{-1}, & \text{если } r(v) \geq k^{-1}. \end{cases}$ Положим $V_k := \bigcup_{v \in V} O_{\mathbb{R}^n}\big(v, r_k(v)\big)$. Рассмотрим множество

$$T := \bigcup_k \bigcup_I \bigcap_{i>I} \big\{t \in [a,b] : G_i(t) \subset V_k\big\}.$$

Вследствие измеримости многозначных функций G_i, $i = 1, 2, \ldots,$ это множество измеримо. Покажем, что $T = \big\{t \in [a,b] : G(t) \subset V\big\}$, и тогда измеримость G будет установлена.

Пусть $t \in T$. Тогда существуют натуральные k, I такие, что при всех $i > I$ выполнено $G_i(t) \subset V_k$. Выберем номер i так, чтобы $h_{\mathbb{R}^n}(G_i(t), G(t)) < (2k)^{-1}$. Имеем

$$G(t) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(G_i(t), \frac{1}{2k}\Big) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(V_k, \frac{1}{2k}\Big) \subset V.$$

Таким образом, доказано вложение $T \subset \big\{t \in [a,b] : G(t) \subset V\big\}$.

Теперь зафиксируем такое $t \in [a,b]$, что $G(t) \subset V$. Для каждого $y \in G(t)$ определим $r(y) := \sup\big\{r > 0 : O_{\mathbb{R}^n}(y, r) \subset V\big\}$. Покажем, что значение $\mathfrak{r} := \inf_{y \in G(t)} r(y)$ положительно. В противном случае в силу компактности множества $G(t) \subset \mathbb{R}^n$ существует сходящаяся к некоторому $y \in G(t)$ последовательность $\{y_i\} \subset G(t)$, для которой $r(y_i) \to 0$. Но $r(y_i) \geq r(y) - \rho_{\mathbb{R}^n}(y_i, y)$. Поэтому при y_i, достаточно близких к y, выполнено $r(y_i) \geq 2^{-1} r(y)$, а это противоречит тому, что $r(y_i) \to 0$. Итак, $\mathfrak{r} > 0$.

При всех $k > \mathfrak{r}^{-1} 2$ имеет место вложение

$$O_{\mathbb{R}^n}\Big(G(t), \frac{\mathfrak{r}}{2}\Big) \subset V_k.$$

Выбрав номер i так, чтобы $h_{\mathbb{R}^n}\big(G_i(t), G(t)\big) < (2k)^{-1}$, получим

$$G_i(t) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(G(t), \frac{1}{2k}\Big) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(V_k, \frac{1}{2k}\Big) \subset V.$$

Таким образом, доказано вложение $\big\{t \in [a,b] : G(t) \subset V\big\} \subset T$, поэтому справедливо равенство $\big\{t \in [a,b] : G(t) \subset V\big\} = T$. Измеримость отображения $G(\cdot)$ установлена. □

2. Условия суперпозиционной измеримости

Пусть задано многозначное отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, имеющее компактные значения. Это отображение называется *суперпозиционно измеримым*, если для любой измеримой функции $q : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ суперпозиция $F(\cdot, q(\cdot)) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ является измеримой многозначной функцией. Как известно (см., например, [7, § 1.5]), для суперпозиционной измеримости отображения F достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло *условиям Каратеодори*: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо, а для п. в. $t \in [a,b]$ отображение $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ непрерывно. Сформулируем более общие условия суперпозиционной измеримости рассматриваемого отображения F (использующие специфику конечномерных пространств).

Теорема 2.1. *Пусть для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $F(\cdot, x) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *измеримо, а для п. в.* $t \in [a,b]$ *любых* $i \in \overline{1,n}$ *и всех* $\bar{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ *отображение* $F(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_m) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *непрерывно справа. Тогда* F *суперпозиционно измеримо.*

Доказательство. Пусть функция $q = (q_1, \ldots, q_m) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ измерима. Покажем измеримость суперпозиции $G(\cdot) := F(\cdot, q(\cdot)) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

Компактность значений $G(t)$ при п. в. $t \in [a,b]$ очевидна.

Для произвольных чисел $x_2, \ldots, x_m$ определим многозначную функцию

$$G_1(\cdot, x_2, \ldots, x_m) = F(\cdot, q_1(\cdot), x_2, \ldots, x_m) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n.$$

Зафиксируем натуральное i. Для каждого целого числа j зададим множество E_{ij} таких $t \in [a,b]$, что $q_1(t) \in \big[i^{-1}(j-1), i^{-1}j\big)$. Это множество измеримо вследствие измеримости функции q_1. Определим ступенчатую функцию $q_{1i} : [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющую значением $q_{1i}(t) = i^{-1}j$ при $t \in E_{ij}$. Вследствие измеримости $F(\cdot, x)$ многозначная функция $F(\cdot, q_{1i}(\cdot), x_2, \ldots, x_m)$ измерима на каждом из множеств E_{ij}, и поэтому измерима на всем $[a,b]$.

В силу непрерывности справа отображения $F(t, \cdot, x_2, \ldots, x_m) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ при $i \to \infty$ для п. в. t имеет место сходимость $F(t, q_{1i}(t), x_2, \ldots, x_m) \to G_1(t, x_2, \ldots, x_m)$ (в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ по метрике Хаусдорфа). Согласно предложению 1.2, предельная многозначная функция $G_1(\cdot, x_2, \ldots, x_m)$ также измерима.

Далее определим отображение $G_2(\cdot, x_3, \ldots, x_m) = G_1(\cdot, q_2(\cdot), x_3, \ldots, x_m)$ и, повторяя приведенные рассуждения, докажем его измеримость. Таким же образом устанавливается измеримость всех композиций, полученных последовательными подстановками в отображение $F(\cdot, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ измеримых функций $q_1(\cdot)$, $q_2(\cdot)$, $\ldots$, $q_m(\cdot)$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_m$. После всех подстановок установим измеримость отображения $F\big(\cdot, q_1(\cdot), q_2(\cdot), \ldots, q_m(\cdot)\big)$. $\square$

Замечание 2.1. В литературе также рассматривается и более общее определение суперпозиционной измеримости отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, означающее, что для любой измеримой многозначной функции $Q : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, $Q(t) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $t \in [a,b]$, суперпозиция $F(\cdot, Q(\cdot)) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измерима. Однако, без предположения непрерывности отображения $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ множество $F(t, Q(t))$ не обязано быть компактным. Например, однозначное отображение $F : [-1, 0] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемое соотношениями $F(t,x) = x^{-1}$, $F(t, 0) = -1$, очевидно удовлетворяет условиям теоремы 2.1, однако даже для постоянного многозначного отображения $Q : [-1, 0] \rightrightarrows \mathbb{R}$, $Q(t) = [0,1]$ при любом t множество $F(t, Q(t)) = (-\infty, -1]$ не является компактным. Здесь мы такие измеримые отображения не рассматриваем.

3. Условия суперпозиционной селектируемости

Пусть задано многозначное отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, имеющее компактные значения. Это отображение называется *суперпозиционно селектируемым*, если для любой измеримой функции $q : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ суперпозиция $F(\cdot, q(\cdot)) : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ имеет *измеримый селектор*, то есть существует такая измеримая функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $y(t) \in F(t, q(t))$ при п. в. $t \in [a,b]$. Как известно (см., например, [7, § 1.5]), для суперпозиционной селектируемости отображения F достаточно, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}^n$

отображение $F(\cdot,x):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ обладало измеримым сечением, а для п. в. $t\in[a,b]$ отображение $F(t,\cdot):\mathbb{R}^m\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ было полунепрерывным сверху. Сформулируем более общие условия суперпозиционной селектируемости рассматриваемого отображения F (использующие специфику конечномерных пространств).

Теорема 3.1. *Пусть для любого фиксированного $x\in\mathbb{R}^n$ у отображения $F(\cdot,x):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ существует измеримый селектор, а для п. в. $t\in[a,b]$ любых $i\in\overline{1,n}$ и всех $\bar{x}_i=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^{m-1}$ отображение $F(t,x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_m):\mathbb{R}\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ односторонне справа полунепрерывно сверху. Тогда F суперпозиционно селектируемо.*

Доказательство. Пусть функция $q=(q_1,\ldots,q_m):[a,b]\to\mathbb{R}^m$ измерима. Покажем, что многозначное отображение $G(\cdot):=F(\cdot,q(\cdot)):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ обладает измеримым селектором. Вначале для любых $x_2,\ldots,x_m$ определим многозначное отображение

$$G_1(\cdot,x_2,\ldots,x_m):=F(\cdot,q_1(\cdot),x_2,\ldots,x_m):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$$

и покажем, что оно обладает измеримым селектором.

Зафиксируем натуральное i. Для каждого целого числа j определим измеримое множество E_{ij} таких $t\in[a,b]$, что $q_1(t)\in\big[i^{-1}(j-1),i^{-1}j)\big)$. Затем определим, как и при доказательстве теоремы 2.1, ступенчатую функцию $q_{1i}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $q_{1i}(t)=i^{-1}j$ при $t\in E_{ij}$. Многозначная функция $F(\cdot,q_{1i}(\cdot),x_2,\ldots,x_m)$ имеет на каждом из множеств E_{ij} измеримый селектор y_{ij}, соответственно функция $y_i:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, определяемая формулой $y_i(t)=y_{ij}(t)$, $t\in E_{ij}$, есть измеримый селектор этой функции на всем $[a,b]$.

Теперь при любом $I=1,2,\ldots$ определим многозначное отображение $\Phi_I:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ формулой $\Phi_I(t):=\overline{\bigcup_{i>I}y_i(t)}$, $t\in[a,b]$ (черта над множеством означает его замыкание). Поскольку отображение $F(t,\cdot,x_2,\ldots,x_m)$ является односторонне справа полунепрерывным сверху, согласно предложению 1.1 замкнутое множество $\Phi_I(t)\subset\mathbb{R}^n$ вложено в компакт, и поэтому само является компактным. Последовательность этих компактных множеств убывает (по вложению). Поэтому при п. в. $t\in[a,b]$ множество $\Phi(t):=\bigcap_I\Phi_I$ не пусто и компактно. Кроме того, многозначное отображение $\Phi_I:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ измеримо (см. [7, теорема 1.5.6 (в)]). Следовательно, многозначное отображение $\Phi:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ также измеримо (см. [7, теорема 1.5.8 (а)]).

Оценим полуотклонение $h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)$ при $t\in[a,b]$. Так как отображение $F(t,\cdot,x_2,\ldots,x_m)$ является односторонне справа полунепрерывным сверху, для п. в. $t\in[a,b]$ имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists I_\varepsilon\ \ \forall i>I_\varepsilon\ \ h^+_{\mathbb{R}^n}\big(F(t,q_{1i}(t),x_2,\ldots,x_m),F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\big)<\varepsilon.$$

Следовательно, выполнены неравенства:

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\Big(\bigcup_{i>I_\varepsilon}y_i(t),F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\Big)<\varepsilon\ \Rightarrow\ h^+_{\mathbb{R}^n}\Big(\overline{\bigcup_{i>I_\varepsilon}y_i(t)},F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\Big)\le\varepsilon.$$

Итак, $h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi_{I_\varepsilon}(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)\le\varepsilon$, а поскольку $\Phi_{I_\varepsilon}(t)\supset\Phi(t)$, получаем

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)\le\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности положительного ε, будет выполнено равенство

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)=0.$$

Это равенство означает (см. [6, с. 112]), что $\Phi(t) \subset G_1(t, x_2, \ldots, x_m)$. Измеримый селектор измеримого многозначного отображения $\Phi(\cdot)$ является искомым измеримым селектором многозначного отображения $G_1(\cdot, x_2, \ldots, x_m)$.

Далее определим отображение $G_2(\cdot, x_3, \ldots, x_m) = G_1(\cdot, q_2(\cdot), x_3, \ldots, x_m)$ и, повторяя приведенные рассуждения, докажем, что оно имеет измеримый селектор. Таким же образом устанавливается измеримая селектируемость всех композиций, полученных последовательными подстановками в отображение $F(\cdot, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ измеримых функций $q_1(\cdot)$, $q_2(\cdot)$, ..., $q_m(\cdot)$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_m$. После всех подстановок установим измеримую селектируемость отображения $F\big(\cdot, q_1(\cdot), q_2(\cdot), \ldots, q_m(\cdot)\big)$. □

References

[1] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985. [A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].

[2] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic press, New York; London, 1972.

[3] А. И. Булгаков, Л. Н. Ляпин, “О связности множеств решений функциональных включений”, *Математический сборник*, **119(161)**:2(10) (1982), 295–300; англ. пер.:A. I. Bulgakov, L. N. Lyapin, “On the connectedness of the solution sets of functional inclusions”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 287–292.

[4] А. И. Булгаков, “Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:11 (1990), 1872–1878; англ. пер.:A. I. Bulgakov, “Functional-differential inclusions with a nonconvex right-hand side conditions”, *Differential Equations*, **26**:11 (1990), 1385–1391.

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория эктремальных задач*, Наука, М., 1974. [A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[6] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[7] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, ЛИБРОКОМ, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, LIBROKOM Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].

[8] А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Панасенко, “Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **1**:39 (2012), 17–20. [A. I. Bulgakov, A. A. Grigorenko, E. A. Panasenko, “Perturbation of Volterra inclusions by impulse operator”, *Izv. IMI UdGU*, **1**:39 (2012), 17–20 (In Russian)].

[9] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, “О корректности обобщенных уравнений нейрополей с импульсным управлением”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2016, № 5, 75–79; англ. пер.:E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, “On well-posedness of generalized neural field equations with impulsive control”, *Russian Mathematics*, **60**:5 (2016), 66–69.

[10] A. Ponosov, E. Zhukovskii, “Generalized functional differential equations: existence and uniqueness of solutions”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2016, № 112, 1–19.

[11] Е. С. Жуковский, О. В. Скопинцева, “О корректности дифференциального уравнения, испытывающего импульсные воздействия на заданной линии”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17**:1 (2012), 45–48. [E. S. Zhukovskiy, O. V. Skopintseva, “On well-posedness of differential equation with impulses on the given line”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:1 (2012), 45–48 (In Russian)].

[12] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2

(2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized Caratheodory conditions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[13] И. В. Шрагин, “О некоторых σ-алгебрах, связанных с измеримостью суперпозиций”, *Математические заметки*, **80**:6 (2006), 926–933; англ. пер.:I. V. Shragin, “On σ-algebras related to the measurability of compositions”, *Mathematical Notes*, **80**:6 (2006), 868–874.

[14] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[15] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

Информация об авторе

Серова Ирина Дмитриевна, младший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; младший научный сотрудник института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Information about the author

Irina D. Serova, Junior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Junior Researcher, X-Bio Institute. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 26.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Received 02.07.2021
Reviewed 26.08.2021
Accepted for press 10.09.2021